

# جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی  
پاییز ۱۴۰۲



تاریخ انتشار: ۱۸ مهر ۱۴۰۲

## تمرین اول

فضای برداری و زیرفضاها

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.
۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.
۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

تاریخ تحویل: ۵ آبان ۱۴۰۲

## سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

پرسش ۱ (۲۰ نمره) در هر مورد مشخص کنید که مجموعه داده شده یک فضای برداری هست یا خیر، و درستی جواب خود را با اثبات و یا مثال نقض نشان دهید.

(آ) (۵ نمره) مجموعه بردارهای  $U$  که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3a + 1\}$$

(ب) (۵ نمره) مجموعه بردارهای  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  که ضرب اسکالر آن به صورت  $k(a, b) = (ka, b)$  تعریف شده است و جمع آن جمع عادی در اعداد حقیقی است.

(ج) (۵ نمره) مجموعه اعداد حقیقی که جمع آن به صورت  $x \oplus y = x - y$  تعریف می‌شود و ضرب آن ضرب عادی در مجموعه اعداد حقیقی است.

(د) (۵ نمره) مجموعه  $\mathbb{R}^3$  که جمع برداری آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 + 5, a_2 + b_2 - 7, a_3 + b_3 + 1)$$

و ضرب اسکالر آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1 + 5(c - 1), ca_2 - 7(c - 1), ca_3 + c - 1)$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) با توجه به مفهوم Direct Sum به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) (۱۰ نمره) با فرض اینکه  $U = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}$  زیرفضای  $W$  از  $\mathbb{R}^4$  را طوری مشخص کنید که  $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ .

(ب) (۱۰ نمره) با فرض اینکه  $U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in \mathbb{R}^5 : x, y \in \mathbb{R}\}$  زیرفضای  $W$  از  $\mathbb{R}^5$  را طوری مشخص کنید که  $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ .

پرسش ۳ (۲۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) فرض کنید که  $S$  مجموعه تمام دنباله‌های بی‌نهایت عضوی از اعداد حقیقی به شکل  $(a_1, a_2, \dots)$  باشد به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . ثابت کنید که  $S$  یک زیرفضا از مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی است.

(ب) (۱۰ نمره) مجموعه  $S$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S = \{f \in V : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$$

و  $V$  برابر است با مجموعه تمام توابع از بازه  $[0, 1]$  به  $\mathbb{R}$ . ثابت کنید که  $S$  زیرفضایی از فضای برداری  $V$  است.

پرسش ۴ (۱۵ نمره) دو ماتریس  $n \times n$  مانند  $A, B$  را در نظر بگیرید. اثبات کنید که اگر  $AB$  را بتوان به صورت ضرب چند *Elementary Matrix* نوشت. آنگاه می‌توان گفت که  $A$  را هم می‌توان به صورت ضرب چند *Elementary Matrix* نوشت.

پرسش ۵ (۱۵ نمره) ماتریس  $A$  را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم ماتریسی مانند  $B$  پیدا کنیم. به صورتی که  $AB = I$  باشد. این کار را با استفاده از تشکیل دادن *Augmented matrix* و سپس تبدیل آن به *Reduced Echelon Form* انجام دهید.

همچنین در نهایت *Row Operation* هایی که انجام دادید را به صورت *Elementary Matrix* بنویسید.

پرسش ۶ (۱۰ نمره) برای دستگاه معادلات زیر جواب مناسب را بدست آورید.

(آ) (۳ نمره)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(ب) (۳ نمره)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(ج) (۴ نمره)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 7x_2 - 13x_3 &= -10 \\ 3x_1 + 6x_2 - 12x_3 &= -9 \end{aligned}$$

تاریخ تحویل: ۵ آبان ۱۴۰۲

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

پرسش ۱ (۱۰۰ نمره) در این بخش می‌خواهیم دستگاه معادلات خطی را با کمک الگوریتم کاهش ردیفی حل کنیم. معادله  $Ax = b$  به شما داده می‌شود و از شما جواب معادله بصورت صعودی و همچنین ماتریس وارون  $A$  خواسته می‌شود. در سطر اول ورودی عدد  $n$  که بیانگر ابعاد ماتریس مربعی  $A$  است داده می‌شود. در  $n$  سطر بعدی نیز به ترتیب سطرهای ماتریس  $[A|b]$  داده می‌شود.

$$-10 \leq a_{ij}, x_i, n \leq 10$$

$$a_{ij}, x_i \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

برای خروجی ابتدا جواب های معادله را بصورت اعداد صحیح صعودی و همراه با براکت، خروجی دهید. در  $n$  سطر بعد نیز، ماتریس وارون  $A$  را با دقت ۲ رقم اعشار خروجی دهید. اگر معادله داده شده جواب نداشت یا بیش از یک جواب داشت، فقط عبارت

no unique solution

را خروجی دهید.

همچنین تضمین می‌شود جواب های معادله در صورت یکتایی صحیح می‌باشند. توجه کنید که در این تمرین مجاز به استفاده از توابع `numpy.linalg` نمی‌باشید و باید سوال را با روش کاهش ردیفی حل کنید. ورودی نمونه ۱

```
3
-2 -4 -10 0
9 0 -5 -58
5 -6 -3 -68
```

خروجی نمونه ۱

```
[-7 -1 6]
[[-0.05 0.08 0.03]
 [ 0. 0.09 -0.17]
 [-0.09 -0.05 0.06]]
```

ورودی نمونه ۲

```
3
1 -10 3 105
1 -10 3 105
-1 5 1 -25
```

خروجی نمونه ۲

no unique solution